SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Alberto Venni

SPAZI DI BANACH CON LA PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI HILBERT

25 maggio 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Viene usata l'esistenza della trasformata di Hilbert come operatore lineare continuo in $L^p(\mathbf{R}, X)$ per $1 < p < \infty$ (X spazio di Banach) come la proprietà che definisce la classe (HT), in effetti identica alla classe UMD. Tale clsse di spazi di Banach viene studiata senza fare uso della sua caratterizzazione probabilistica. Seguendo risultati di Bourgain, si mostra come si possono ottenere, per funzioni con valori in uno spazio di Banach di tipo (HT), i teoremi di moltiplicatori di Mihlin e Marcinkiewicz.

Abstract. The existence of the Hilbert transform as a bounded linear operator in $L^p(\mathbf{R}, X)$ for $1 < p < \infty$ (X Banach space) is employed as the defining property of the class (HT), which is actually identical to the class UMD. Such class of Banach spaces is studied without reference to its probabilistic characterization. Following results of Bourgain, it is shown how one can derive, for functions with values in a (HT) Banach space, the Mihlin and Marcinkiewicz multipliers theorems.

1 Introduzione

Sia X uno spazio di Banach e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio con misura finita. Se $\mathcal{G}$ è una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$, allora $\forall f \in L^1((\Omega, \mathcal{F}, \mu), X)$ $\exists g \in L^1((\Omega, \mathcal{G}, \mu), X)$ (unica, a meno di insiemi $\mathcal{G}$-misurabili con misura nulla) tale che $\forall G \in \mathcal{G}$ $\int_G g\, d\mu = \int_G f\, d\mu$. Nel linguaggio del Calcolo delle Probabilità, g si chiama *aspettazione condizionata* di f relativa a $\mathcal{G}$, e si denota con $E(f|\mathcal{G})$.

Se $1 \leq p < \infty$, allora la restrizione a $L^p((\Omega, \mathcal{F}, \mu), X)$ dell'operatore $f \mapsto E(f|\mathcal{G})$ è un proiettore di $L^p((\Omega, \mathcal{F}, \mu), X)$ in sè, continuo e di norma unitaria, la cui immagine coincide con $L^p((\Omega, \mathcal{G}, \mu), X)$ (per tutto ciò si veda [4] §V.1; si noti che non è richiesta la proprietà di Radon-Nikodým su X).

Sia ora assegnata una successione crescente $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di sotto-σ-algebre di $\mathcal{F}$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione in $L^1((\Omega, \mathcal{F}, \mu), X)$. Diremo che $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è una *martingala* se $\forall n \in \mathbf{N}$ si ha $f_n = E(f_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. Ponendo $g_n = f_{n+1} - f_n$, dire che $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è una martingala equivale a dire che $\forall n \in \mathbf{N}$ $g_n \in L^1((\Omega, \mathcal{F}_{n+1}, \mu), X)$ e $\int_G g_n\, d\mu = 0$ $\forall G \in \mathcal{F}_n$.

Negli anni '60, D.L. BURKHOLDER ha dimostrato che se $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è la successione delle differenze di una martingala a valori scalari, allora $\forall p \in]1, \infty[$ $\exists C_p > 0$ tale che per ogni successione $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in $\{-1, 1\}$ e $\forall m \in \mathbf{N}$ si ha

$$C_p^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{m} g_k \right\|_p \leq \left\| \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k g_k \right\|_p \leq C_p \left\| \sum_{k=0}^{m} g_k \right\|_p . \tag{1.1}$$

Per funzioni a valori in uno spazio di Banach X la disuguaglianza (1.1) (dove, comunque, C_p dovrà dipendere anche da X) in generale non vale. Una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché (1.1) valga $\forall p \in]1, \infty[$ è che X sia isomorfo a uno spazio di Hilbert; una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché (1.1) valga per almeno un $p \in]1, \infty[$ è che X sia super-riflessivo (cioè che la sua norma sia equivalente a una norma uniformemente convessa). In realtà, per funzioni a valori in X, la (1.1) non dipende da $p \in]1, \infty[$, il che consente di definire la classe UMD come quella classe di spazi di Banach X tali che valga (1.1) per qualche (o, equivalentemente, per ogni) $p \in]1, \infty[$.

In seguito è stato dimostrato, rispettivamente da BOURGAIN [1] e da BURKHOLDER che X è nella classe UMD se e solo se per almeno un (o, equivalentemente, per ogni) $p \in]1, \infty[$ la trasformata di Hilbert è un operatore continuo da $L^p(\mathbf{R}, X)$ in sè. È quindi – teoricamente – possibile studiare le proprietà degli spazi UMD facendo riferimento solo a quest'ultima proprietà. Scopo di questo seminario è di mostrare come questa possibilità teorica possa essere attuata in pratica. In effetti nella letteratura sugli spazi UMD viene sempre usata la caratterizzazione probabilistica, che ha l'innegabile vantaggio di una grande elasticità d'uso; lo svantaggio consiste nella necessità di usare, in modo talvolta assai pesante, tecniche probabilistiche applicate a funzioni a valori in spazi di Banach.

2 Spazi di Banach di tipo (HT)

Se $f \mapsto Tf = k * f$ è un operatore integrale singolare che agisce su funzioni scalari, per dimostrare che T è continuo da L^p a L^p (con $1 < p < \infty$) si può procedere come segue:

(i) si prova che T è continuo da L^2 in sè, per esempio mostrando che la trasformata di Fourier di k è limitata;

(ii) da (i), usando, per esempio, il teorema di decomposizione di Calderón-Zygmund e la condizione di Hörmander su k, si ottiene una stima L^1–L^1 debole;

(iii) usando (i), (ii) e il teorema d'interpolazione di Marcinkiewicz si ottiene che T è continuo L^p a L^p per $1 < p \leq 2$;

(iv) da (iii) si ottiene la continuità in L^p con $p > 2$ per mezzo di argomenti di dualità.

Questa procedura si può seguire anche nel caso di funzioni a valori in spazi di Banach, **con la rilevante eccezione del primo passaggio**. Esso infatti si basa sul fatto che la trasformata di Fourier è un isomorfismo di L^2 su se stesso, cosa che è falsa nel caso dello spazio $L^2(\mathbf{R}^N, X)$ se X non è isomorfo a uno spazio di Hilbert. Occorre dunque, anche solo per arrivare a individuare una classe di spazi, procedere in maniera diversa.

Nel seguito, E è uno spazio di Banach e $\forall \varepsilon > 0$ H_ε è la *trasformata troncata di Hilbert* di indice ε, cioè l'operatore di convoluzione $f \mapsto h_\varepsilon * f$, con $f \in L^p(\mathbf{R}, E)$ (dove $1 \leq p < \infty$) e $h_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è il nucleo definito da

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \leq \varepsilon \\ 1/(\pi t) & \text{se } |t| > \varepsilon. \end{cases}$$

Si noti che $h_\varepsilon \in L^r(\mathbf{R})$ $\forall r \in]1, \infty]$, e quindi, per la disuguaglianza di Young, H_ε è continuo da $L^p(\mathbf{R}, E)$ a $L^q(\mathbf{R}, E)$ appena $1 \leq p < q \leq \infty$. In generale, però, H_ε non è necessariamente continuo da $L^p(\mathbf{R}, E)$ in sè, nemmeno se $1 < p < \infty$.

Si ha comunque, come nel caso scalare:

Lemma 2.1 *Se $f \in C_0^1(\mathbf{R}, E)$, allora $\forall p \in]1, \infty]$ e $\forall \varepsilon > 0$ si ha $H_\varepsilon f \in L^p(\mathbf{R}, E)$; inoltre $H_\varepsilon f$ converge in $L^p(\mathbf{R}, E)$ per $\varepsilon \to 0$.*

Dim. $H_\varepsilon f \in L^p(\mathbf{R}, E)$, perché $f \in L^1(\mathbf{R}, E)$ e $h_\varepsilon \in L^p(\mathbf{R})$. Poiché $\mathrm{supp}(H_\varepsilon f - H_1 f) \subseteq [-1, 1] + \mathrm{supp} f$ se $0 < \varepsilon < 1$, è sufficiente provare che $H_\varepsilon f$ converge in $L^\infty(\mathbf{R}, E)$ per $\varepsilon \to 0$. Usando il fatto che h_ε è dispari, si ottiene $\|H_\varepsilon f - H_\delta f\|_\infty \leq \dfrac{2}{\pi} |\delta - \varepsilon| \, \|f'\|_\infty$. ■

Si ha poi:

Teorema 2.2 *Sia $1 \leq p < \infty$. Supponiamo che $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che $H_{\varepsilon_0} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}, E))$. Allora $H_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}, E))$ $\forall \varepsilon > 0$ e $\|H_\varepsilon\|_{p \to p}$ non dipende da ε.*

Dim. Questo segue facilmente dall'identità $h_\varepsilon(t) = (\delta/\varepsilon) h_\delta(\delta t/\varepsilon)$. ■

In base al teorema 2.2, fissato $p \in]1, \infty[$, per uno spazio di Banach E si hanno le due seguenti possibilità:

(I) $\forall \varepsilon > 0$ $H_\varepsilon \notin \mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}, E))$

(II) $\forall \varepsilon > 0$ $H_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}, E))$, con $\|H_\varepsilon\|_{p\to p}$ costante; in questo caso, per il lemma 2.1 e la densità di $C_0^1(\mathbf{R}, E)$ in $L^p(\mathbf{R}, E)$, si ottiene che $\forall f \in L^p(\mathbf{R}, E)$ esiste in $L^p(\mathbf{R}, E)$ il $\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f$.

Nel secondo caso, diremo che E è di tipo $(\mathrm{HT})_p$. È poi facile vedere che se E è di tipo $(\mathrm{HT})_p$ e $(\mathrm{HT})_q$, e $f \in L^p(\mathbf{R}, E) \cap L^q(\mathbf{R}, E)$, allora $H_\varepsilon f$ converge, in $L^p(\mathbf{R}, E)$ e in $L^q(\mathbf{R}, E)$, allo stesso limite, che possiamo quindi chiamare Hf (la trasformata di Hilbert di f). Del resto, si ha anche:

Teorema 2.3 *Se $1 < p < \infty$, E è di tipo $(HT)_p$ e $f \in L^p(\mathbf{R}, E)$, allora q.d. su $\mathbf{R}$ $\lim_{\varepsilon\to 0}(H_\varepsilon f)(t) = (Hf)(t)$.*

Dim. Se P_ε e Q_ε denotano rispettivamente, gli operatori di convoluzione con il nucleo di Poisson e con il nucleo di Poisson coniugato, si prova, come nel caso scalare, che $(H_\varepsilon f)(t) - (Q_\varepsilon f)(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ q.d. e che $(P_\varepsilon Hf)(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} (Hf)(t)$ q.d. Facendo poi uso del teorema di Hahn-Banach si trova che $Q_\varepsilon f = P_\varepsilon Hf$, dato che l'analoga uguaglianza vale quando f è scalare. ■

Le operazioni elementari che si eseguono usualmente sugli spazi di Banach conservano la proprietà $(\mathrm{HT})_p$.

Teorema 2.4 *Sia $1 < p < \infty$ ed E uno spazio di Banach di tipo $(HT)_p$.*

(a) *Ogni spazio di Banach isomorfo a E è di tipo $(HT)_p$.*

(b) *Ogni sottospazio chiuso di E è di tipo $(HT)_p$.*

(c) *Se F è un altro spazio di Banach di tipo $(HT)_p$, anche $E \times F$ è di tipo $(HT)_p$.*

(d) *Se F è un sottospazio chiuso di E, anche E/F è di tipo $(HT)_p$.*

Dim. Diamo un cenno della dimostrazione di (d). È sufficiente provare che $\|H_\varepsilon f\|_p \leq C\|f\|_p$ quando $f : \mathbf{R} \to E/F$ è semplice e ha supporto di misura finita. Sarà allora $f(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(t)\theta_k$, con $\theta_k \in E/F$. Se $\delta > 1$ e $x_k \in \theta_k$ è tale che $\|x_k\|_E \leq \delta\|\theta_k\|_{E/F}$, si ponga $g(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(t)x_k$, in modo che $\|g\|_p \leq \delta\|f\|_p$. Se $\pi : E \to E/F$ è la proiezione naturale, si ha $H_\varepsilon f = \pi \circ (H_\varepsilon g)$, e quindi $\|H_\varepsilon f\|_p \leq \|H_\varepsilon g\|_p \leq \|H_\varepsilon\|_{p\to p}\|g\|_p \leq \delta\|H_\varepsilon\|_{p\to p}\|f\|_p$. ■

Teorema 2.5 *Se (E, F) è una coppia d'interpolazione di spazi di Banach di tipo $(HT)_p$, allora $\forall\theta \in]0, 1[$ sono di tipo $(HT)_p$ anche $[E, F]_\theta$ (spazio d'interpolazione complesso) ed $(E, F)_{\theta,p}$ (spazio d'interpolazione reale).*

Dim. Infatti in entrambi i casi $\mathcal{F}(L^p(\mathbf{R}, E), L^p(\mathbf{R}, F)) = L^p(\mathbf{R}, \mathcal{F}(E, F))$. ■

Teorema 2.6 *Se E è di tipo $(HT)_p$ e (Ω, μ) è uno spazio con misura σ-finita, allora anche $L^p((\Omega, \mu), E)$ è di tipo $(HT)_p$.*

Dim. Identificare $L^p(\mathbf{R}, L^p((\Omega, \mu), E))$ con $L^p(\mathbf{R} \times \Omega, E)$, e applicare il teorema di Fubini. ■

Se E è uno spazio di Hilbert, allora la trasformata di Fourier è un isomorfismo di $L^2(\mathbf{R}, E)$ su se stesso; perciò la procedura descritta sopra per le funzioni scalari si può applicare alle funzioni a valori in E, e si ottiene che

Teorema 2.7 *Ogni spazio di Hilbert è di tipo $(HT)_p$ $\forall p \in]1, \infty[$.*

Fin qui abbiamo parlato di spazi di tipo $(\mathrm{HT})_p$; tuttavia l'indice p si può eliminare. Infatti si ha:

Teorema 2.8 *La proprietà $(HT)_p$ non dipende da p.*

Schema di dimostrazione.

(I) Se E è di tipo $(\mathrm{HT})_p$, allora E^* (il duale di E) è di tipo $(\mathrm{HT})_{p'}$ (dove p' è l'esponente coniugato di p); si usa il fatto che h_ε è dispari e che $\forall g \in L^{p'}(\mathbf{R}, E^*)$ si ha

$$\|g\|_{p'} = \sup\left\{\left|\int_{\mathbf{R}} \langle f(t), g(t)\rangle\, dt\right|; f \in L^p(\mathbf{R}, E), \|f\|_p \leq 1\right\}.$$

(II) Se E^* è di tipo $(\mathrm{HT})_{p'}$, allora E è di tipo $(\mathrm{HT})_p$. Infatti E è isomorfo a un sottospazio chiuso di E^{**}.

(III) Se E è di tipo $(\mathrm{HT})_p$, allora è di tipo $(\mathrm{HT})_q$ $\forall q \in]1, p]$ (applicare la procedura di Calderón-Zygmund-Hörmander descritta sopra).

(IV) $E \in (HT)_p \Rightarrow E^* \in (HT)_{p'} \Rightarrow E^* \in (HT)_r$ $\forall r \in]1, p'] \Rightarrow E \in (HT)_q$ $\forall q \in [p, \infty[$. ■

Si noti che dalla dimostrazione del teorema 2.8 segue anche che E è di tipo (HT) se e solo se lo è E^*.

È spesso utile lavorare sul toro $\mathbf{T}$ anziché su $\mathbf{R}$. Identificheremo $\mathbf{T}$ con il gruppo quoziente $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (invece che, come si fa più di frequente, con $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$); conseguentemente le funzioni su $\mathbf{T}$ si identificano con funzioni su $\mathbf{R}$ periodiche di periodo 1. Coerentemente, i coefficienti di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbf{T}, E)$ sono definiti da $\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} f(t)\, dt$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Se $h_{\varepsilon,\mathbf{T}} = 0$ su $[-\varepsilon, \varepsilon]$ e $h_{\varepsilon,\mathbf{T}}(t) = \cot(\pi t)$ per $\varepsilon < |t| \leq 1/2$, e se chiamiamo $H_{\varepsilon,\mathbf{T}}$ l'operatore di convoluzione (su $\mathbf{T}$) con $h_{\varepsilon,\mathbf{T}}$, allora $H_{\varepsilon,\mathbf{T}} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}, E))$ $\forall p \in [1, \infty]$ e per ogni spazio di Banach E, ma la convergenza in $L^p(\mathbf{T}, E)$ di $H_{\varepsilon,\mathbf{T}}$ per $\varepsilon \to 0$ non sussiste in generale. In proposito, vale il seguente

Teorema 2.9 *E è di tipo $(HT)_p$ $(1 < p < \infty)$ se e solo se esiste $H_{\mathbf{T}} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}, E))$ tale che $\forall f \in L^p(\mathbf{T}, E)$ $H_{\varepsilon,\mathbf{T}} f \underset{\varepsilon \to 0}{\to} H_{\mathbf{T}} f$ in $L^p(\mathbf{T}, E)$. In tal caso $\forall f \in L^p(\mathbf{T}, E)$ e $\forall n \in \mathbf{Z}$ si ha $(H_{\mathbf{T}} f)\hat{}(n) = -i(\operatorname{sgn} n)\hat{f}(n)$.*

Per una dimostrazione della prima parte del teorema si veda [3]; per provare la seconda parte, si può dimostrare che $\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{h}_{\varepsilon,\mathbf{T}}(n) = -i \operatorname{sgn} n$, e poi si procede in modo ovvio, perché i coefficienti di Fourier di f dipendono con continuità da f rispetto alla norma di $L^p(\mathbf{T}, E)$. ■

3 Teoremi di moltiplicatori

I risultati di questo paragrafo risalgono principalmente a [1] e [2]. Per un'estensione a più variabili di spazio, si veda [6].

In questo paragrafo, E sarà sempre uno spazio di Banach di tipo (HT) e $p \in]1, \infty[$.

Stabiliamo che $\forall f \in L^1(\mathbf{R}, E)$ la trasformata di Fourier di f e la trasformata inversa siano definite, rispettivamente da

$$(\mathcal{F} f)(\tau) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i t \tau} f(t)\, dt$$

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(\tau) = (\mathcal{F} f)(-\tau)$$

Diremo che $m \in L^\infty(\mathbf{R})$ è un moltiplicatore di Fourier in $L^p(\mathbf{R}, E)$ se $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}, E)$ vale la stima

$$\|\mathcal{F}^{-1}(m \mathcal{F} f)\|_p \leq C \|f\|_p \tag{3.1}$$

con C indipendente da f.

Diremo che $\lambda : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ è un moltiplicatore di Fourier in $L^p(\mathbf{T}, E)$ se $\forall f \in L^p(\mathbf{T}, E)$ vale la stima

$$\| \sum_{k \in \mathbf{Z}} \lambda_k e^{2\pi i k (\cdot)} \hat{f}(k) \|_p \leq C \|f\|_p \tag{3.2}$$

con C indipendente da f. Più precisamente (3.2) significa che $\forall f \in L^p(\mathbf{T}, E)$ $\exists g \in L^p(\mathbf{T}, E)$ con $\|g\|_p \leq C \|f\|_p$ e $\hat{g}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$ $\forall k \in \mathbf{Z}$.

L'obiettivo è arrivare ai seguenti teoremi di moltiplicatori

Teorema 3.1 (Mihlin vettoriale) *Se $m \in L^\infty(\mathbf{R}) \cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$, con $\sup_{t \neq 0} |t\, m'(t)| < +\infty$, allora m è un moltiplicatore di Fourier in $L^p(\mathbf{R}, E)$, e la costante C che compare in (3.1) dipende solo da p, E, $\|m\|_\infty$, $\sup_{t \neq 0} |t\, m'(t)|$.*

Teorema 3.2 (Marcinkiewicz vettoriale) *Se $\lambda \in \ell^\infty(\mathbf{Z})$ e*

$$\max\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|, \sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} |\lambda_{-k} - \lambda_{-k-1}|\right\} = \gamma < +\infty$$

allora λ è un moltiplicatore di Fourier in $L^p(\mathbf{T}, E)$ e la costante C dipende solo da p, E, $\|\lambda\|_\infty$ e γ.

Facendo accorto uso della formula di somma di Poisson

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(t+na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{2\pi int/a}(\mathcal{F}f)(n/a)$$

($a > 0$, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}, E)$), e di opportuni ragionamenti di approssimazione, si può ottenere il teorema 3.1 come conseguenza di 3.2. Perciò ci occupiamo solo di questo.

Nel seguito, denoteremo con H la trasformata di Hilbert sul toro introdotta nell'ultima parte del §2. Ricordiamo che $H \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}, E))$ e che

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ \forall f \in L^p(\mathbf{T}, E)\ \ (Hf)\hat{}(n) = -i(\operatorname{sgn} n)\hat{f}(n).$$

Il *proiettore di Riesz* è l'operatore R definito da $(Rf)(t) = \frac{1}{2}(f(t) + \hat{f}(0) + i(Hf)(t))$, in modo che $R \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}, E))$ e $\|R\|_{p\to p}$ dipende solo da $\|H\|_{p\to p}$. Si ha poi che $\forall f \in L^p(\mathbf{T}, E)$

$$(Rf)\hat{}(n) = \begin{cases} \hat{f}(n) & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

I *proiettori di Riesz traslati* sono gli operatori R_n ($n \in \mathbf{Z}$) definiti da $(R_n f)(t) = e^{2\pi int}[R(e^{-2\pi in(\cdot)}f)](t)$, in modo che $R_0 = R$, $R_n \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}, E))$, con $\|R_n\|_{p\to p} = \|R\|_{p\to p}$ e

$$(R_n f)\hat{}(m) = \begin{cases} \hat{f}(m) & \text{se } m \geq n \\ 0 & \text{se } m < n. \end{cases}$$

Sia $\Delta = \{m, \ldots, n\}$ un "segmento" di $\mathbf{Z}$ ($m \leq n$). L'operatore di "somma parziale" S_Δ è definito da $(S_\Delta f)(t) = \sum_{k\in\Delta} e^{2\pi ikt}\hat{f}(k)$, o equivalentemente da $S_\Delta = R_m - R_{n+1}$. Pertanto $S_\Delta \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}, E))$, con $\|S_\Delta\|_{p\to p} \leq 2\|R\|_{p\to p}$.

Più in generale, assegnata $\lambda : \Delta \to \mathbf{C}$ chiamiamo T_λ l'operatore definito da $(T_\lambda f)(t) = \sum_{k\in\Delta} \lambda_k e^{2\pi ikt}\hat{f}(k)$, o equivalentemente da $T_\lambda = \sum_{k\in\Delta} \lambda_k(R_k - R_{k+1}) = \lambda_m R_m - \lambda_n R_{n+1} + \sum_{k,k-1\in\Delta} (\lambda_k - \lambda_{k-1})R_k$, in modo che $T_\lambda \in \mathcal{L}(L^p(\mathbf{T}, E))$, con

$$\|T_\lambda\|_{p\to p} \leq (2\|\lambda\|_\infty + \operatorname{Var}_\Delta(\lambda))\|R\|_{p\to p},$$

dove $\mathrm{Var}_\Delta(\lambda) = \sum_{k,k-1\in\Delta} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|$.

La dimostrazione del teorema di Marcinkiewicz per funzioni a valori vettoriali si appoggia sui tre teoremi che sono enunciati qui sotto, e delle dimostrazioni dei quali sarà dato cenno nei §4 e 5.

Teorema 3.3 (Principio generalizzato di contrazione) *Per $1 \le k \le n$ sia $T_k = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \lambda_{kj} R_j$, dove $\{j \in \mathbf{Z}; \lambda_{kj} \neq 0\}$ è un insieme finito $\forall k$. Poniamo $\mu = \max_k \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\lambda_{kj}|$, e siano $f_1, \dots, f_n \in L^p(\mathbf{T}, E)$. Allora*

$$\left(\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k T_k f_k\|_p^p\right)^{1/p} \le 4\mu \|R\|_{p\to p} \left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k f_k\|_p^p\right)^{1/p}. \tag{3.3}$$

Nel seguito useremo la notazione $\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^n \varepsilon_k \cdots\|$, dove $m, n \in \mathbf{Z}$ con $m \le n$, $\varepsilon = (\varepsilon_m, \dots, \varepsilon_n)$ dove $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ e il taglio sulla $\sum_\varepsilon$ significa che essa va divisa per il numero dei suoi addendi (che sono 2^{n-m+1}).

Poniamo $\Delta_0 = \{0\}$ e per $k \ge 1$ $\Delta_k = \{j \in \mathbf{N}; 2^{k-1} \le j < 2^k\}$, $\Delta_{-k} = -\Delta_k$.

Teorema 3.4 *$\exists C_0(p, E) \in \mathbf{R}^+$ tale che se $m, n \in \mathbf{Z}$ con $m \le n$ e $f \in L^p(\mathbf{T}, E)$, allora*

$$\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^n \varepsilon_k S_{\Delta_k} f\|_p^p\right)^{1/p} \le C_0(p, E)\|f\|_p. \tag{3.4}$$

Teorema 3.5 *Se $m, n \in \mathbf{Z}$ con $m \le n$ e $f_m, \dots, f_n \in L^p(\mathbf{T}, E)$, allora*

$$\|\sum_{k=m}^n S_{\Delta_k} f_k\|_p \le C_0(p', E^*) \left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^n \varepsilon_k S_{\Delta_k} f\|_p^p\right)^{1/p}. \tag{3.5}$$

Vediamo ora come si deduce il teorema 3.2 dai teoremi 3.3, 3.4 e 3.5. Assegnato λ come nell'enunciato di 3.2, si ponga

$$\gamma_0 = \max\left\{\|\lambda\|_\infty, \sup_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{r,r-1\in\Delta_k} |\lambda_r - \lambda_{r-1}|\right\}$$

e sia f un polinimio trigonometrico a valori in E,

$$f(t) = \sum_{k=m}^n \sum_{r\in\Delta_k} e^{2\pi i r t} \hat{f}(r).$$

Proviamo che

$$\|\sum_r \lambda_r e^{2\pi i r t}\hat{f}(r)\|_p \leq 12\gamma_0 \|R\|_{p\to p}\, C_0(p,E)\, C_0(p',E^*)\, \|f\|_p$$

il che è sufficiente a provare 3.2 per la densità dei polinomi trigonometrici in $L^p(\mathbf{T},E)$.

Sia Λ_k l'operatore in $L^p(\mathbf{T},E)$ definito da $(\Lambda_k g)(t) = \sum_{r\in\Delta_k} \lambda_r e^{2\pi i r t}\hat{f}(r)$; allora $\Lambda_k = \Lambda_k S_{\Delta_k} = S_{\Delta_k}\Lambda_k$ e (per 3.5)

$$\|\sum_r \lambda_r e^{2\pi i r(\cdot)}\hat{f}(r)\|_p = \|\sum_{k=m}^{n} \Lambda_k f\|_p = \|\sum_{k=m}^{n} S_{\Delta_k}\Lambda_k f\|_p \leq$$

$$C_0(p',E^*)\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k S_{\Delta_k}\Lambda_k f\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Per il teorema 3.3, dato che $\Lambda_k = \sum_{r\in\Delta_k} \lambda_r(R_r - R_{r+1}) = \lambda_{2^{k-1}}R^{2^{k-1}} - \lambda_{2^k}R_{2^k+1} + \sum_{r=2^{k-1}+1}^{2^k} (\lambda_r - \lambda_{r+1})R_r$, l'ultimo membro della precedente disuguaglianza si maggiora ulteriormente con

$$12\gamma_0\, C_0(p',E^*)\|R\|_{p\to p}\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k S_{\Delta_k} f\|_p^p\right)^{1/p} \leq$$

$$12\gamma_0\, \|R\|_{p\to p}\, C_0(p,E)\, C_0(p',E^*)\, \|f\|_p.$$

■

4 Il principio generalizzato di contrazione

Lemma 4.1 (Principio di contrazione) *Sia X uno spazio normato, $p \in [1,\infty[$, $n \geq 1$, $(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{C}^n$. Allora*

$$\left(\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k\lambda_k x_k\|^p\right)^{1/p} \leq 2\|\lambda\|_\infty \left(\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k x_k\|^p\right)^{1/p}.$$

Dim. È sufficiente mostrare che se $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n$, vale la stima senza il coefficiente 2. È anche sufficiente, per ragioni di omogeneità, considerare il caso in cui $\|\lambda\|_\infty = 1$. Quindi $\lambda_k \in [-1,1]\ \forall k = 1,\ldots,n$.

Se $\lambda_k \in \{0,1\}$, allora $\delta_k = 2\lambda_k - 1 \in \{-1,1\}$ e $\lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta_k$; perciò dalla disuguaglianza di Minkowski segue che

$$\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\lambda_k x_k\|^p\right)^{1/p} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\|^p\right)^{1/p} +$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\delta_k\varepsilon_k x_k\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\|^p\right)^{1/p}.$$

Se $\lambda_k \in [0,1]$, allora $\lambda_k = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\lambda_{kj}$, con $\lambda_{kj} \in \{0,1\}$, e il risultato segue da quanto appena visto e dalla disuguaglianza di Minkowski.
Se $\lambda_k \in [-1,1]$, allora $\lambda_k = \delta_k|\lambda_k|$, con $|\lambda_k| \in [0,1]$, $\delta_k \in \{-1,1\}$, e

$$\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\lambda_k x_k\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\delta_k\,|\lambda_k|x_k\|^p\right)^{1/p} =$$

$$\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\,|\lambda_k|x_k\|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\|^p\right)^{1/p}$$

per quanto sopra visto. ■

Lemma 4.2 *Se E è uno spazio di Banach di tipo (HT), $p \in]1,\infty[$, $f_1,\dots,f_n \in L^p(\mathbf{T},E)$ e $m_1,\dots,m_n \in \mathbf{Z}$, allora*

$$\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k R_{m_k} f_k\|_p^p\right)^{1/p} \le 4\|R\|_{p\to p}\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f_k\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Dim. Si applichi (due volte) il lemma precedente, ricordando che

$$(R_{m_k} f_k)(s) = \varphi(s)(R(\psi\, f_k))(s),$$

dove $\varphi(s) = e^{2\pi i m_k s}$, $\psi(s) = e^{-2\pi i m_k s}$. ■

Dimostrazione del teorema 3.3. Non è restrittivo supporre $\mu = 1$, cosicché $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\lambda_{kj}| \le 1$ $\forall k$. Allora

$$\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k T_k f_k\|_p^p\right)^{1/p} \le \quad \text{(Minkowski)}$$

$$\sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}|\lambda_{1,j_1}|\cdots|\lambda_{n,j_n}|\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k R_{j_k} f_k\|_p^p\right)^{1/p} \le$$

$$\text{(lemma 4.2)}\quad 4\|R\|_{p\to p}\sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}|\lambda_{1,j_1}|\cdots|\lambda_{n,j_n}|\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f_k\|_p^p\right)^{1/p} =$$

$$4\|R\|_{p\to p}\prod_{k=1}^{n}\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\lambda_{kj}|\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f_k\|_p^p\right)^{1/p} \le 4\|R\|_{p\to p}\left(\sum_{\varepsilon}\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f_k\|_p^p\right)^{1/p}.$$

■

5 Il nocciolo duro della storia

Il nocciolo duro della nostra storia è la dimostrazione del teorema 3.4, perché poi 3.5 si ottiene con ragionamenti di dualità, facendo uso della "ortogonalità" reciproca degli operatori S_{Δ_k}. Si noti che il teorema 3.4 non è altro che il teorema di Marcinkiewicz per il caso particolare in cui $\lambda : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ è tale che $\lambda_r = \varepsilon_k \ \forall r \in \Delta_k$.

Lemma 5.1 *Sia E uno spazio di Banach di tipo (HT), e siano $q, r \in]1, \infty[$ con*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \in]0, 1[.$$

Per $k = 1, \ldots, n$ sia $\varphi_k \in L^q(\mathbf{T})$, con $\hat{\varphi}_k(0) = 0$, e $f_k \in L^r(\mathbf{T}, E)$. Allora, chiamando $H_{\mathbf{C}}$ e H_E le trasformate di Hilbert in $L^p(\mathbf{T})$ e in $L^p(\mathbf{T}, E)$ rispettivamente, si ha:

$$\|H_E\|_{p\to p}^{-p} \int_{[0,1]^{n+1}} \|\sum_{k=1}^{n} (H_{\mathbf{C}}\varphi_k)(\theta_{k+1}) f_k(\theta_1, \ldots, \theta_k)\|^p \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n+1} \leq$$

$$\int_{[0,1]^{n+1}} \|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\theta_{k+1}) f_k(\theta_1, \ldots, \theta_k)\|^p \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n+1} \leq$$

$$\|H_E\|_{p\to p}^{p} \int_{[0,1]^{n+1}} \|\sum_{k=1}^{n} (H_{\mathbf{C}}\varphi_k)(\theta_{k+1}) f_k(\theta_1, \ldots, \theta_k)\|^p \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n+1}.$$

L'idea fondamentale della dimostrazione, per i dettagli della quale rinvio a [1] o a [5], è che se $\psi \in L^r(\mathbf{T})$, g è un polinomio trigonometrico con supporto $\subseteq \{-N, \ldots, N\}$ e $\hat{\psi}(k) = 0$ per $|k| \leq N$, allora $(H_{\mathbf{C}}\psi)g = H_E(\psi g)$.

$\forall n \geq 1$ chiamiamo r_n l'n-esima funzione di Rademacher, cioè la funzione su $[0, 1[$ tale che $r_n(t) = (-1)^{k-1} \ \forall t \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[$.

Lemma 5.2 *Sia E uno spazio di Banach di tipo (HT), $p \in]1, \infty[$, $n \geq 1$. Per $1 \leq k \leq n$ sia $F_k : \{-1, 1\}^n \to E$ una funzione. Allora $\forall \varepsilon \in \{-1, 1\}^n$*

$$\int_0^1 \|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k r_{k+1}(t) F_k(r_1(t), \ldots, r_k(t))\|^p \, dt \leq$$

$$\|H_E\|_{p\to p}^{2p} \int_0^1 \|\sum_{k=1}^{n} r_{k+1}(t) F_k(r_1(t), \ldots, r_k(t))\|^p \, dt.$$

Dim. Si ponga $I = [-1/2, 1/2]$ e $s : I \to \mathbf{R}$, $s(\theta) = \operatorname{sgn}(\cos\theta)$. Allora s è pari e $\hat{s}(0) = 0$. La disuguaglianza da provare equivale a

$$\int_{I^{n+1}} \|\sum_{k=1}^{n} s(\theta_{k+1}) \varepsilon_k F_k(s(\theta_1), \ldots, s(\theta_k))\|^p \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n+1} \leq$$

$$\|H_E\|_{p\to p}^{2p}\int_{I^{n+1}}\|\sum_{k=1}^{n}s(\theta_{k+1})F_k(s(\theta_1),\dots,s(\theta_k))\|^p\,d\theta_1\dots d\theta_{n+1}.$$

Applicando il lemma 5.1, si vede facilmente che il primo membro di questa disuguaglianza è

$$\leq \|H_E\|_{p\to p}^{p}\int_{I^{n+1}}\|\sum_{k=1}^{n}(H_{\mathbf{C}}s)(\theta_{k+1})\varepsilon_k F_k(s(\theta_1),\dots,s(\theta_k))\|^p\,d\theta_1\dots d\theta_{n+1}=$$

(dato che s è pari e (conseguentemente) $H_{\mathbf{C}}s$ è dispari)

$$\|H_E\|_{p\to p}^{p}\int_{I^{n+1}}\|\sum_{k=1}^{n}(H_{\mathbf{C}}s)(\theta_{k+1})F_k(s(\theta_1),\dots,s(\theta_k))\|^p\,d\theta_1\dots d\theta_{n+1}\leq$$

(ancora per 5.1)

$$\|H_E\|_{p\to p}^{2p}\int_{I^{n+1}}\|\sum_{k=1}^{n}s(\theta_{k+1})F_k(s(\theta_1),\dots,s(\theta_k))\|^p\,d\theta_1\dots d\theta_{n+1}.$$

■

È facile vedere che una funzione su $[0,1[$ si può scrivere nella forma

$$t\mapsto r_{n+1}(t)\,F_n(r_1(t),\dots,r_n(t))$$

se e solo se gode delle due seguenti proprietà:

(i) è costante su $\left[\frac{j-1}{2^{n+1}},\frac{j}{2^{n+1}}\right[$ $\forall j=1,\dots 2^{n+1}$

(ii) ha valor medio nullo su $\left[\frac{j-1}{2^{n}},\frac{j}{2^{n}}\right[$ $\forall j=1,\dots 2^{n}$.

Sia ora $f\in L^1(\mathbf{T},E)=L^1([0,1[,E)$, e $\forall n\geq 1$ sia M_nf la funzione da $[0,1[$ a E che su ogni intervallo del tipo $\left[\frac{j-1}{2^{n}},\frac{j}{2^{n}}\right[$ $(j=1,\dots 2^n)$ coincide con il valor medio di f sull'intervallo medesimo. È facile allora verificare che $M_nf-M_{n+1}f$ soddisfa (i) e (ii), e quindi il lemma 5.2 fornisce:

Lemma 5.3 *Sia E uno spazio di Banach di tipo (HT), $p\in]1,\infty[$, $n\geq 1$. Allora $\forall f\in L^p([0,1[,E)$*

$$\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(M_kf-M_{k+1}f)\|_p\leq 2\|H_E\|_{p\to p}^2\|f\|_p.$$

Dim. Infatti da 5.2 segue

$$\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(M_kf-M_{k+1}f)\|_p\leq\|H_E\|_{p\to p}^2\|\sum_{k=1}^{n}(M_kf-M_{k+1}f)\|_p=$$

$$\|H_E\|_{p\to p}^2\|M_1f-M_{n+1}f\|_p\leq 2\|H_E\|_{p\to p}^2\|f\|_p$$

perché $\|M_j\|_{p\to p}\leq 1$.

■

Chiamiamo ora τ_h l'operatore di traslazione in $L^p(\mathbf{T}, E)$, cioè $(\tau_h f)(\theta) = f(\theta - h)$, e poniamo $G_k f = \int_0^1 \tau_h M_k \tau_{-h} f \, dh$ $(f \in L^p(\mathbf{T}, E))$, in modo che $\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (G_k - G_{k+1}) f\|_p \leq 2\|H_E\|^2_{p\to p}\|f\|_p$, e inoltre, dopo calcoli fastidiosi ma non difficili,

$$(G_n f - G_{n+1} f)\hat{}(r) = -\frac{\sin^4(2^{-n-1}\pi r)}{(2^{-n-1}\pi r)^2}\hat{f}(r).$$

Poniamo ora $\lambda_{n,r} = -\dfrac{(2^{-n-1}\pi r)^2}{\sin^4(2^{-n-1}\pi r)}$ se $r \in \Delta_n$, $\lambda_{n,r} = 0$ altrimenti. Sia T_n l'operatore in $L^p(\mathbf{T}, E)$ definito da $(T_n f)\hat{}(r) = \lambda_{n,r}\hat{f}(r)$. Allora $T_n(G_n - G_{n+1}) = (G_n - G_{n+1})T_n = S_{\Delta_n}$; pertanto, per il teorema 3.3,

$$\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k S_{\Delta_k} f\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k T_k (G_k - G_{k+1}) f\|_p^p\right)^{1/p} \leq$$

$$4\mu\|R\|_{p\to p}\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k (G_k - G_{k+1}) f\|_p^p\right)^{1/p} \leq 8\mu\|R\|_{p\to p}\|H_E\|^2_{p\to p}\|f\|_p.$$

Per completare la dimostrazione di 3.4, basta stimare μ, che in base al teorema 3.3 si può porre $= \sup_k \mu_k$, dove (v. §3)

$$\mu_k = |\lambda_{k,2^{k-1}}| + |\lambda_{k,2^k-1}| + \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k-1} |\lambda_{k,j} - \lambda_{k,j-1}|.$$

Ora per $j \in \{2^{k-1}, \ldots, 2^k - 1\}$, si ha $2^{-k-1}\pi j \in [\pi/4, \pi/2[$, e quindi $|\lambda_{k,j}| \leq \pi^2$ mentre

$$\sum_j |\lambda_{k,j} - \lambda_{k,j-1}| \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left|\frac{d}{dt}\frac{t^2}{\sin^4 t}\right| dt,$$

che è una costante assoluta. Perciò per un'opportuna costante assoluta K si ha

$$\left(\sum_\varepsilon \|\sum_{k=m}^{n} \varepsilon_k S_{\Delta_k} f\|_p^p\right)^{1/p} \leq K\|R\|_{p\to p}\|H_E\|^2_{p\to p}\|f\|_p.$$

■

Tutti i risultati qui esposti sono riportati, con dimostrazioni dettagliate, in [5].

Bibliografia

[1] J. Bourgain: Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional; Ark. Mat. **22** (1983), 163–168.

[2] J. Bourgain: Vector-valued singular integrals and the H_1-BMO duality; in: *Probability Theory and Harmonic Analysis*; Dekker, New York 1986; pp. 1–19.

[3] P. Clément, B. de Pagter: Some remarks on the Banach space valued Hilbert transform; Indag. Mathem. N.S. **2** (4) (1991), 453–460.

[4] J. Diestel, J.J. Uhl jr.: *Vector Measures*; A.M.S., Princeton 1977.

[5] A. Venni: Banach spaces with the Hilbert transform property; Preprint, 1995.

[6] F. Zimmermann: On vector-valued Fourier multiplier theorems; Studia Math. **93** (1989), 201–222.